ABI 2018 – Analysis A

Aufgabengruppe 1

1.) $f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Nst.: $x_1 = \underline{\underline{-1{,}5}}$

$f_2(x) = \ln(x+2)$; $\mathbb{D} =]-2; +\infty[$

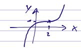
$\Rightarrow x+2 > 0 \quad | -2$ Nst.: $x+2 = 1 \quad | -2$

$x > -2$ $\underline{\underline{x_1 = -1}}$

2.) $(2|1)$ waagrechte Tangente $\Rightarrow f'(2) = 0$

ABER: kein Extrempunkt in $(2|1) \Rightarrow f''(2) = 0$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ Idee:



$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Lösen oder $f(x) = x^3$

um 2 LE nach rechts, $g(x) = f(x-2) = (x-2)^3$

und um 1 LE nach oben verschieben $l(x) = g(x) + 1$

$\underline{\underline{l(x) = (x-2)^3 + 1}}$

Achtung! Umständliche Lösung!

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(2) = 8a + 4b + 2c + d \overset{!}{=} 1 \quad (I)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(2) = 12a + 4b + c = 0 \quad (II)$

$f''(2) = 6ax + 2b$

$f''(2) = 12a + 2b = 0 \quad (III)$

aus (III): $b = -6a \quad (III')$

in (I): $8a + 4\cdot(-6a) + 2c + d = 1$

$-16a + 2c + d = 1 \quad (I')$

in (II): $12a + 4\cdot(-6a) + c = 0$

$-12a + c = 0$

$c = 12a \quad (II')$

in (I'): $-16a + 2\cdot 12a + d = 1$

$8a + d = 1$

$d = 1 - 8a$

$\Rightarrow f_a(x) = ax^3 - 6ax^2 + 12ax + 1 - 8a$

Wähle $a = 1$: $f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

3.) $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

(1) $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

$f'(0) = -15 = m$ ✓

(2) $f(5) = -125 + 9\cdot 25 - 75 - 25 = 0$ ✓

$f'(5) = -3\cdot 25 + 18\cdot 5 - 15 = 0$ ✓

(3) $f(-1) = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$

$f'(-1) = -3 - 18 - 15 = -36$

Tangente: $y = -36x + t$

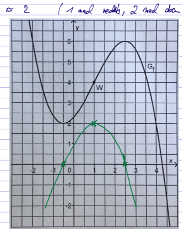
$(-1|0)$ einsetzen: $0 = 36 + t$

$t = -36$

$\Rightarrow y = -36x - 36$ ✓

4.) $W(1|4)$

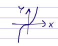
$f'(1) \approx 2$ (1 nach rechts, 2 nach oben)



5.) a) $f_a(x) = \underbrace{\frac{1}{a}}_{} x^3 - x$

>0, da $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ „Im Großen" gilt der charakteristische Verlauf von x^3

$\Rightarrow$ Abb. 2 ist korrekt



b) $f_a'(x) = 3\cdot\frac{1}{a}x^2 - 1 \overset{!}{=} 0$

$f_a'(3) = 27\cdot\frac{1}{a} - 1 \overset{!}{=} 0 \quad | +1$

$\frac{27}{a} = 1 \quad | \cdot a$

$\underline{\underline{a = 27}}$

Aufgabengruppe 2:

1.) $f(x) = \sqrt{3x-5}$; $\mathbb{D} = [\frac{5}{3}; +\infty[$

$3x - 5 \geq 0 \quad | +5$

$3x \geq 5 \quad | :3$

$x \geq \frac{5}{3}$

Tangente: $f(3) = \sqrt{9-5} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2}(3x-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3x-5}}$

$f'(3) = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$

$2 = \frac{1}{4}\cdot 3 + t \quad | -\frac{3}{4}$

$\frac{5}{4} = t \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}}$

2.) siehe AG 1

3.) 1. Nullstelle: $x_1 = 3$ (Obergrenze = Untergrenze)

Monotonieverhalten durch G_f festgelegt

F	smf		sms				smf
f	−	−1,5	+	3		4,5	−

$\Rightarrow$ Je eine weitere Nst. für $x > 4{,}5$

und $x < -1{,}5$

$\Rightarrow$ F besitzt drei Nullstellen

1.) $g(x) = x \cdot (x-2)$

$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 2$

$A = \left| \int_0^2 g(x)\,dx \right| = \left| \int_0^2 x^2 - 2x \, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 \right|$

$= \left| \frac{1}{3} \cdot 8 - 4 - 0 \right| = \left| \frac{8}{3} - \frac{12}{3} \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$ FE

2.) $f_a(x) = e^{-x^2+ax}$

a) $f_a(0) = e^0 = \underline{\underline{1}} \qquad (0|1)$

b) $f_a'(x) = e^{-x^2+ax} \cdot (-2x+a)$

$f_a'(3) = e^{-9+3a} \cdot (-6+a) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow -6+a = 0 \quad |+6$

$\underline{\underline{a = 6}}$

3.) $f(x) = -x^3+3x^2-2x \quad ; \quad W(1|f(1))$

a) $f'(x) = -3x^2+6x-2$

$f'(1) = -3+6-2 = \underline{\underline{1}}$ ✓

b) $f(1) = -1+3-2 = 0$

$\Rightarrow$ Geraden: $y = mx + t$

mit $0 = m \cdot 1 + t \quad | -m$

$t = -m$

$g: y = mx - m$

Für $m < f'(1)$: 3 Nst.

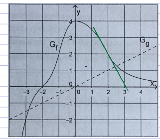
Für $m \geq f'(1)$: 1 Nst.

4a) Ein Produkt ist 0, wenn ein Faktor 0 ist

G_f hat eine Nst. , G_g hat eine Nst.

$\Rightarrow$ 2 Nullstellen ✓

b)



$f'(2) \approx -2$

$g'(2) = 0{,}5$

$f(2) = 2$

$g(2) = 1$

$p'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$

$= -2 \cdot 1 + 2 \cdot 0{,}5 = \underline{\underline{-1}}$

Aufgabengruppe 2 :

1.) $f(x) = \ln(-2x+8)$

a) $f(0) = \ln(8) \qquad \underline{\underline{S_y\,(0|\ln(8))}}$

$f(x) \overset{!}{=} 0$

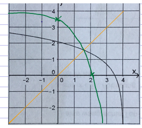
$\ln(-2x+8) = 0 \quad | e^{\cdots}$

$-2x+8 = e^0 = 1 \quad | -8$

$-2x = -7 \quad | :(-2)$

$x = 3{,}5 \qquad \underline{\underline{S_x\,(3{,}5|0)}}$

b)



2.) a) $h(13) = h(4+9) = h(4-9) = h(-5) = \underline{\underline{8}}$

b) $\int_{-7}^{3} h'(x)\,dx = [h(x)]_{-7}^{3} = h(3) - h(-7)$

$= 1 - 6 = \underline{\underline{-5}}$

3.) $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$

a) $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$

$f(x) = g(x) \quad ; \quad e^x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - 1 \quad | -\frac{1}{2}x$

$\underbrace{e^x}_{>0} = -1$ ↯

$\Rightarrow$ Keine gemeinsamen Punkte

b) $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c \quad ; \quad c > 0$

$\int_0^1 f(x) - g_c(x)\,dx \overset{!}{=} 3$

$\int_0^1 e^x + \frac{1}{2}x - (\frac{1}{2}x - c)\,dx = 3$

$\int_0^1 e^x + c\,dx = [e^x + cx]_0^1 = e^1 + c - (e^0 + 0)$

$= e + c - 1 \overset{!}{=} 3 \quad | +1$

$e + c = 4 \quad | -e$

$\underline{\underline{c = 4 - e}}$

4.) siehe AG 1

Teil B – Aufgabengruppe 1

1.) $f(x) = 2 \cdot [(\ln(x))^2 - 1]$

a) Nullstellen: $f(x) \overset{!}{=} 0$

$$2 \cdot [(\ln(x))^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln(x))^2 - 1 = 0 \quad | + 1$$

$$(\ln(x))^2 = 1 \quad | \sqrt{\ldots}$$

I.) $\ln(x) = 1 \quad | e^{\ldots}$ II.) $\ln(x) = -1 \quad | e^{\ldots}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = e}}$ $\underline{\underline{x_2 = e^{-1}}}$

$$f'(x) = 2 \cdot (2 \cdot \ln(x)) \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{4\ln(x)}{x}}} \overset{!}{=} 0$$

$$4\ln(x) = 0 \quad | : 4$$

$$\ln(x) = 0 \quad | e^{\ldots}$$

$$x_1 = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Monotonieverhalten:

f'	$-$		$+$
G_f	smf	1	sms
		TP	

$$f(1) = 2 \cdot [(\ln(1))^2 - 1] = \underline{\underline{-2}}$$

$\Rightarrow T(1|-2)$

b) $$f''(x) = \frac{x \cdot 4 \cdot \frac{1}{x} - 4\ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{4 - 4\ln(x)}{x^2}$$

$$f''(x) \overset{!}{=} 0$$

$$4 - 4\ln(x) = 0 \quad | + 4 \cdot \ln(x)$$

$$4\ln(x) = 4 \quad | : 4$$

$$\ln(x) = 1 \quad | e^{\ldots}$$

$$\underline{\underline{x_1 = e}}$$

Krümmungsverhalten:

f''	$+$		$-$
G_f	linksg.	e	rechtsg.
		WP ✓	

$$f(e) = 2 \cdot ((\ln(e))^2 - 1) = 0$$

$W(e|0)$

$$f'(e) = \frac{4 \cdot \ln(e)}{e} = \frac{4}{e}$$

Tangente $0 = \frac{4}{e} \cdot e + t \quad | -4$

$t = -4 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{4}{e} \cdot x - 4}}$

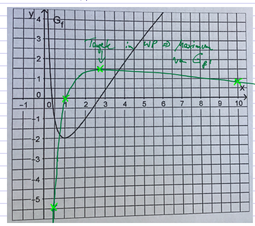
c) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{4\ln(x)}{x} = \text{"}\frac{4 \cdot (-\infty)}{+0}\text{"} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{4\ln(x)}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} = \underline{\underline{0}}$$

ln „verliert"

$$f'(0{,}5) = \frac{4 \cdot \ln(0{,}5)}{0{,}5} = \underline{\underline{-5{,}5}}$$

$$f'(10) = \frac{4 \cdot \ln(10)}{10} = \underline{\underline{0{,}9}}$$



Tangente näherungsweise: $y = 1{,}5x - 4$

d) $$\int_{e^{-1}}^{c} f(x)\,dx$$

1. Wert: $c = e^{-1}$ ✓ (Obergrenze = Untergr.)

2. Wert: Flächenbilanz
Negative Fläche für $\int_{e^{-1}}^{e} f(x)\,dx$, danach positive Fläche

$\Rightarrow \exists\, c > e$, so dass das Integral 0 ist ✓

e) $h(x) = 1{,}5x - 4{,}5 + \frac{1}{x}$

Asymptoten: schiefe Asymptote: $y = \underline{\underline{1{,}5x - 4{,}5}}$

senkrechte Asymptote: $\underline{\underline{x = 0}}$